ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS 155 (2006), 281–307

# DÉFORMATIONS FORMELLES DE REVÊTEMENTS : UN PRINCIPE LOCAL-GLOBAL

PAR

José Bertin

*Inst. Fourier, Univ. de Grenoble I, B.P. 74*
*38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France*
*e-mail: bertin@ujf-grenoble.fr*

ET

Ariane Mézard

*Bât 425, Mathématique, Université de Paris XI*
*91405 Orsay, France*
*e-mail: ariane.mezard@math.u-psud.fr*

ABSTRACT

Let $C$ be a generically smooth, locally complete intersection curve defined over an algebraically closed field $k$ of characteristic $p \geq 0$. Let $G \subset \mathrm{Aut}_k C$ be a finite group of automorphisms of $C$. We develop a theory of $G$-equivariant deformations of the Galois cover $C \to C/G$. We give a thorough study of the local obstructions, those localized at singular or widely ramified points, to deform equivariantly a cover. As an application, we discuss the case of $G$-equivariant deformations of semistable curves.

## 1. Introduction

Pour étudier le groupe fondamental d'une courbe algébrique en caractéristique $p > 0$, une des méthodes fondamentales est la construction de revêtements par relèvement ou par épaississement ([HaSt], [Ga], [GrMa], [He]). Ce procédé permet d'obtenir un relèvement global à partir de relèvements locaux autour des points de ramification. Pour obtenir une maîtrise complète du processus de relèvement, il faut une approche infinitésimale. L'objet de ce travail est de montrer que la théorie des déformations équivariantes, à la Schlessinger, exposée

Received September 16, 2004 and in revised form May 29, 2005

d'un point de vue général par Illusie ([Il]), permet d'unifier ces constructions, y compris lorsque la courbe dégénère en une courbe semi-stable.

Soit $C$ une courbe réduite connexe localement d'intersection complète définie sur un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Soit $G \subset \mathrm{Aut}_k C$ un groupe fini d'automorphismes de $C$. Nous développons dans cet article une théorie des déformations $G$-équivariantes du revêtement galoisien $C \to C/G$ (§2), modelée sur le cas lisse ([BeMe]). Nous considérons les déformations équivariantes de voisinages formels des points de ramification et des points singuliers (§3). Nous formulons un principe local-global (Théorème 4.3). Nous montrons comment ce principe permet d'expliquer, et éventuellement de généraliser, plusieurs résultats récents sur les questions de relèvements et d'épaississements des revêtements ([BeMe], [Ga], [GrMa], [He], [Pr]). De plus les problèmes posés par la théorie des déformations sont plus généraux que les seules questions de recollement, qui souvent concernent une base spécifique, et ne visent pas la structure locale d'un espace de modules (§4.2). Enfin, la démonstration de ce principe local-global précise le lien entre les déformations locales et globales (§4.1). Elle repose sur l'hypothèse que les points génériques des composantes irréductibles ont une isotropie triviale. Cette hypothèse exclut et revèle l'existence éventuelle d'obstruction de nature globale d'un nouveau type : à la différence des courbes lisses, la caractéristique du corps de base étant positive, les obstructions aux déformations d'une courbe semistable sont de plusieurs natures. Il y a les obstructions locales, concentrées aux points doubles et aux points (fermés) de ramification à groupe d'inertie d'ordre divisible par $p$. En général, les obstructions localisées aux points doubles ne se réduisent pas de manière triviale à celles liées aux origines des branches au point considéré.

Dans la dernière section (§5), nous traitons de manière détaillée le problème local. Il s'agit dans ce cas de décrire l'anneau versel de déformations équivariantes d'un point double. Nous déterminons l'espace tangent aux déformations équivariantes du point double (Proposition 5.7). Dans le cas d'un $p$-groupe cyclique, nous calculons explicitement les dimensions de l'espace tangent et de l'espace des obstructions aux déformations équivariantes du point double (Corollaires 5.9 et 5.12). Nous interprétons ces résultats en termes d'anneaux versels de déformations équivariantes.

## 2. Déformations équivariantes : cas global

Nous rappelons d'abord brièvement le formalisme des déformations équivariantes dans un cadre général. Nous nous concentrons ensuite sur le cas des courbes projectives, éventuellement singulières.

Tous les schémas que nous considèrons dans les sections §2 et §3 sont localement noethériens. Fixons un corps de base $k$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Si $S$ est un schéma, $\mathrm{Sch}_S$ désigne la catégorie des $S$-schémas. Soit $X$ un $S$-schéma localement de type fini et plat. Soit $G \subset \mathrm{Aut}_S X$ un groupe fini de $S$-automorphismes de $X$. Soit $S \to S'$ un morphisme. Un **relèvement $G$-équivariant** de $X$ à $S'$ est la donnée

- d'un schéma $X'$ plat sur $S'$ équipé d'un isomorphisme $\varphi : X \xrightarrow{\sim} X' \times_{S'} S$,
- et d'une action de $G$ sur $X'/S'$ qui rend le morphisme $\varphi$ $G$-équivariant.

Deux relèvements $G$-équivariants $(X'_1, \varphi_1), (X'_2, \varphi_2)$ de $X$ à $S'$ sont **équivalents**, ou isomorphes, s'il existe un $S'$-isomorphisme $G$-équivariant

$$f : X'_1 \xrightarrow{\sim} X'_2, \quad \text{avec } f\varphi_1 = \varphi_2.$$

Une **déformation $G$-équivariante** de $X$ à $S'$ est une classe d'équivalence de relèvements $G$-équivariants de $X$ à $S'$. Le **foncteur des déformations $G$-équivariantes** est défini par

$$D_{X/S,G} : \mathrm{Sch}_S \to \mathrm{Ens}, S' \mapsto \{\text{déformations } G\text{-équivariantes de } X \text{ à } S'\}.$$

L'objet de ce travail est l'étude de ce foncteur dans le cas particulier où $X$ est une courbe $C$ réduite connexe (génériquement lisse), localement d'intersection complète, définie sur un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Nous supposons que $C$ est munie de l'action d'un groupe fini $G$ d'automorphismes et que $G$ agit librement sur un ouvert dense de $C$.

Soit $\Lambda$ un anneau de valuation discrète complet de caractéristique 0 de corps résiduel $k$, par exemple $\Lambda = W(k)$ anneau des vecteurs de Witt de $k$. Soit $\widehat{\mathcal{C}}$ la catégorie dont les objets sont les $\Lambda$-algèbres $R$ locales noethériennes complètes, avec $k \cong R/\mathcal{M}_R$ pour $\mathcal{M}_R$ idéal maximal de $R$ ; les flèches sont les $\Lambda$-morphismes d'anneaux locaux. La catégorie $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{C}}$ formée des objets qui sont de longueur finie comme $\Lambda$-modules. Notons $k[\varepsilon]$, où $\varepsilon^2 = 0$, l'anneau de $\mathcal{C}$ des nombres duaux sur $k$. Définissons le **foncteur des déformations $G$-équivariantes globales**

$$D_{\mathrm{glo}} : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, A \mapsto \{\text{déformations } G\text{-équivariantes de } C \text{ à } \operatorname{Spec} A\}.$$

Notons $\Omega^1_{C/k}$ le faisceau des différentielles de Kähler de la courbe $C$. Comme dans le cas des déformations $G$-équivariantes des courbes lisses ([BeMe]), l'espace tangent au foncteur $D_{\mathrm{glo}}$ est

$$D_{\mathrm{glo}}(k[\varepsilon]) \simeq \mathbf{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)$$

(pour la définition du foncteur **Ext** voir [Grl] 5.6.7). Les obstructions aux déformations appartiennent au groupe $\mathbf{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{C/k},\mathcal{O}_C)$ (pour la théorie générale des déformations équivariantes voir [Il]). D'après le critère de Schlessinger ([Sc] §3.7), le foncteur $D_{\text{glo}}$ admet un **anneau versel de déformations** $R_{\text{glo}}$. Par définition, l'anneau $R_{\text{glo}}$ est un objet de $\widehat{\mathcal{C}}$ tel qu'il existe un morphisme lisse

$$\xi : D_{\text{glo}} \to \operatorname{Hom}_\Lambda(R_{\text{glo}}, -)$$

induisant un isomorphisme $D_{\text{glo}}(k[\varepsilon]) \simeq (\mathcal{M}_{R_{\text{glo}}}/\mathcal{M}^2_{R_{\text{glo}}})^*$ entre espaces tangents. Le morphisme $\xi$ est identifié à une classe d'équivalence de schéma formel

$$[\xi] = \{[\xi_n]\}_{n\geq 1} \in \varprojlim D_{\text{glo}}(R_{\text{glo}}/\mathcal{M}^n_{R_{\text{glo}}}).$$

D'après le théorème d'algébrisation de Grothendieck ([Gro3]), le schéma formel $\xi$ est algébrisable. Ce schéma formel est donc le complété formel d'une courbe $C_{\text{glo}}$ sur $\operatorname{Spec} R_{\text{glo}}$ dite **courbe verselle de déformations**.

Dans le paragraphe suivant (§3), nous détaillons l'étude des déformations équivariantes dans un voisinage formel d'un point singulier de la courbe $C$. Nous explicitons l'espace tangent et le groupe d'obstruction.

## 3. Déformations équivariantes : cas local

Dans cette section nous developpons, faute de référence précise, les ingrédients cohomologiques nécessaires à la formulation de notre problème. Il s'agit pour l'essentiel de construire le complexe cotangent équivariant (tronqué) à la manière de [LiSc].

Soit $C$ une courbe réduite connexe localement d'intersection complète définie sur un corps $k$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Comme au paragraphe §2, nous supposons que $C$ est munie de l'action d'un groupe fini $G$ d'automorphismes et que $G$ agit librement sur un ouvert dense de $C$. Soit $x \in C$ et soit $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ l'anneau local complété de la courbe $C$ au point $x$. Notons $G_x \subset \operatorname{Aut}_k \widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ le stabilisateur de $x$. Avant d'étudier les déformations $G_x$-équivariantes de $C$ au voisinage (formel) du point $x$, nous développons brièvement le formalisme de Lichtenbaum et Schlessinger ([LiSc], voir aussi [Vi]) dans le contexte équivariant. Les anneaux sont ici commutatifs et noethériens, les algèbres (essentiellement) de type fini.

Soit $B$ une $A$-algèbre plate et $G \subset \operatorname{Aut}_A B$ un groupe fini de $A$-automorphismes de $B$. Soit $A' \to A$ un homomorphisme d'anneaux surjectif de noyau $J$ tel que $J^2 = 0$. Une **$G$-déformation** de $B/A$ à $A'$ est une $G$-extension

$B'$ (i.e. $G$ agit sur $B'$)

$$0 \to J \otimes_A B \to B' \to B \to 0$$

telle que $B'$ soit plat sur $A'$. Par souci de clarté, nous commençons par des généralités sur les $(B,G)$-modules (§3.1), puis nous montrons que les $G$-déformations de $B/A$ à $A'$ sont décrites par les groupes

$$\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes B) \quad (i = 1, 2)$$

(Théorème 3.5). A l'aide d'un dévissage spectral nous donnons une interprétation de la nature des groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$, $i = 1, 2$ (§3.3). Nous appliquons enfin ces résultats aux déformations équivariantes locales de la courbe $C$ au point $x$ (§3.4).

3.1. $(B,G)$-MODULES. Notons $B[G]$ l'algèbre libre sur $B$ de base $(\sigma)_{\sigma \in G}$ avec la relation de commutation $\sigma b \sigma^{-1} = \sigma(b)$. Un $(B,G)$-**module** $M$ est un $B$-module muni d'une action de $G$ compatible avec l'action de $G$ dans $B$ :

$$\sigma(b \cdot x) = \sigma(b) \cdot \sigma(x), \quad b \in B, x \in M, \sigma \in G.$$

Si $M, N$ sont des $(B,G)$-modules, alors

$$\mathrm{Hom}_{B,G}(M,N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M,N)^G$$

où $\mathrm{Hom}_B(M,N)$ est muni d'une action de $G$ définie par $\sigma(f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x)))$, $\sigma \in G$, $f \in \mathrm{Hom}_B(M,N)$, $x \in M$. Cette propriété justifie l'existence de la suite spectrale ([Gr1] Théorème 5.6.3)

$$E_2^{i,j} = H^i(G, \mathrm{Ext}^j_B(M,N)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{i+j}_{B,G}(M,N)$$

où $\mathrm{Ext}^n_{B,G}(M,N) = R^n F(M)$, $n$-ième dérivée à droite du foncteur

$$F = \mathrm{Hom}_{B,G}(-, N).$$

Si $X$ est un $B$-module projectif, alors $P = B[G] \otimes_B X$ est un $(B,G)$-module projectif. En effet pour tout $(B,G)$-module $N$,

$$\mathrm{Hom}_{B,G}(B[G] \otimes_B M, N) \simeq \mathrm{Hom}_B(M,N).$$

LEMME 3.1 : *Il existe un système de variables $(X_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$, une action de $G$ par permutation sur $(X_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}$ avec $\bigoplus_{\alpha \in \Upsilon} AX_\alpha$ $(A,G)$-projectif et une surjection de $(A,G)$-modules*

$$R = A[(X_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}] \xrightarrow{\mathfrak{p}} B.$$

*Preuve :* Soit $V$ un sous $A$-module de $B$, $G$-stable et qui engendre $B$ comme $A$-algèbre. Soit $P$ un $(A,G)$-module libre (donc projectif) de base $(Y_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ avec une surjection de $(A,G)$-module $P \twoheadrightarrow V$. Cette surjection induit une surjection $G$-équivariante

$$R = \mathrm{Sym}_A^\bullet(P) \twoheadrightarrow B.$$

Nous pouvons écrire $R = A[(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}]$, où l'ensemble des variables $(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ s'obtient en prenant $|G|$ copies $Y_{\gamma,g}$, $g \in G$ de chaque variable $Y_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$. En écrivant $\alpha = (\gamma, g)$ et $g'\alpha = (\gamma, g'g)$, l'action de $G$ sur $(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}$ vérifie $g \cdot X_\alpha = X_{g\alpha}$ et $\bigoplus_{\alpha\in\Upsilon} AX_\alpha$ est $(A,G)$-projectif (et même $(A,G)$-libre). ∎

Soit $R = A[(X_\alpha)_{\alpha\in\Upsilon}]$ défini par le lemme 3.1. Nous notons $R = A[X_\alpha]$ lorsqu'aucune confusion n'est possible. Soit $I$ le noyau de $\mathfrak{p} : R \to B$

$$0 \to I \to R \xrightarrow{\mathfrak{p}} B \to 0.$$

Comme les variables $X_\alpha$ sont permutées par $G$, le noyau $I$ est un $(R,G)$-module. Soit $F$ un $(R,G)$-module projectif avec une surjection $(R,G)$-linéaire $j : F \to I$. Notons $Q$ le $(R,G)$-module noyau de $j$ :

$$0 \to Q \to F \xrightarrow{j} I \to 0.$$

Soit $F_0$ le sous-$R$-module de $F$ engendré par les relations $j(x)y - j(y)x$ pour $x, y \in F$. Alors $F_0$ est un sous-$(B,G)$-module et la suite suivante est exacte

$$0 \to Q/F_0 \to F/F_0 \xrightarrow{j} R \to B \to 0. \tag{1}$$

La donnée d'une suite exacte de ce type est dite $G$-**présentation libre** de $B/A$. Cette présentation du $(A,G)$-module $B$ est très utile. Elle permet notamment de définir le **complexe cotangent $G$-équivariant**

$$Q/F_0 \to F \otimes_R B \to \Omega^1_{R/A} \otimes_R B \to 0$$

où $\Omega^1_{R/A}$ est le module des différentielles de la $A$-algèbre $R$. Lorsque nous oublions la structure de $G$-module, le complexe précédent s'identifie au complexe cotangent au sens de [LiSc]. Le lemme 3.1 permet de suivre les démonstrations de [LiSc] dans le cas $G$-équivariant et de montrer que la cohomologie du complexe tangent $G$-équivariant ne dépend pas de la $G$-présentation libre. Grâce aux deux lemmes suivants, nous identifions la cohomologie du complexe cotangent $G$-équivariant avec des groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}$.

LEMME 3.2 : *Les $(B,G)$-modules $F \otimes_R B$ et $\Omega^1_{R/A} \otimes_R B$ sont projectifs.*

*Preuve :* Le $(R,G)$-module projectif $F$ est facteur direct d'un $(R,G)$-module libre. Le module $F \otimes_B R$ est facteur direct d'un $(B,G)$-module projectif. Donc $F \otimes_R B$ est un $(B,G)$-module projectif.

Par définition du module des différentielles, il est facile de montrer l'isomorphisme $G$-équivariant suivant

$$\Omega^1_{R/A} \simeq R \otimes_A P$$

où $R = \mathrm{sym}^\bullet_A(P)$ (avec les notations du lemme 3.1) ; l'action de $A[G]$ sur $R \otimes_A P$ est l'action diagonale pour les éléments du groupe $G$ étendue linéairement à $A[G]$. Pour établir la $(B,G)$-projectivité de $\Omega^1_{R/A} \otimes_R B$, il suffit donc de voir que $(R \otimes_A P) \otimes_R B$ est $(B,G)$-projectif. ∎

D'après [LiSc] Proposition 3.2.1, les suites de $(B,G)$-modules suivantes sont exactes :

$$0 \to I/I^2 \to \Omega^1_{R/A} \otimes_R B \to \Omega^1_{B/A} \to 0, \tag{2}$$

$$0 \to Q/F_0 \to F \otimes_R B \to I/I^2 \to 0, \tag{3}$$

pourvu que $B$ soit une $A$-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à $A$. De plus, nous avons alors $\mathrm{Ext}^2_B(\Omega^1_{B/A}, M) = 0$ pour tout $B$-module $M$. Sous ces hypothèses, le lemme 3.3 donne une description des deux premiers groupes de cohomologie du complexe cotangent $G$-équivariant.

LEMME 3.3 : *Supposons que $B$ est une $A$-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à $A$. Soit $M$ un $(B,G)$-module. Alors*

$$\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(I/I^2, M)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes_R B, M)},$$

$$\mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \simeq \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, M)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(F \otimes_R B, M)}.$$

*Preuve :* Comme $B$ est une $A$-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à $A$, la suite de $(B,G)$-module suivante est exacte

$$0 \to I/I^2 \to \Omega^1_{R/A} \otimes_R B \to \Omega^1_{B/A} \to 0. \tag{4}$$

Écrivons la suite exacte longue associée, $i \geq 1$

$$\to \mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes B, M) \to \mathrm{Ext}^i_{B,G}(I/I^2, M) \to \mathrm{Ext}^{i+1}_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M)$$
$$\to \mathrm{Ext}^{i+1}_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes B, M) \to$$

Comme $\Omega^1_{R/A} \otimes_A B$ est $(B,G)$-projectif (Lemme 3.2), $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega^1_{R/A} \otimes B, M) = 0$ et

$$\mathrm{Ext}^i_{B,G}(I/I^2, M) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M), \quad i = 0, 1.$$

Les suites exactes de $(B,G)$-modules (4) et

$$0 \to Q/F_0 \to F \otimes_R B \to I/I^2 \to 0,$$

et le fait que les $(B,G)$-modules $F \otimes_R B$ et $\Omega^1_{R/A} \otimes_A B$ sont projectifs (Lemme 3.2) permettent alors de conclure. ∎

3.2. Déformations équivariantes d'algèbres. Soit $A' \to A$ un homomorphisme d'anneaux qui est surjectif de noyau $J$ tel que $J^2 = 0$. Rappelons qu'une $G$-**déformation** de $B/A$ à $A'$ est une $G$-extension $B'$

$$0 \to J \otimes_A B \to B' \to B \to 0$$

telle que $B'$ soit plat sur $A'$. Rappelons aussi le critère local de platitude ([Gr2])

Lemme 3.4 : *Un $A'$-module $B'$ est plat sur $A'$ si et seulement les deux conditions suivantes sont satisfaites*

i. *$B = B' \otimes_{A'} A$ est plat sur $A$,*
ii. *$J \otimes_A B \to B'$ est injective.*

Considérons une présentation libre $G$-équivariante

$$B = A[(X_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}]/I = A[(x_\alpha)_{\alpha \in \Upsilon}], \quad I = ((f_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$$

avec $\sigma(x_\alpha) = x_{\sigma(\alpha)}$ et $\sigma(f_\gamma) = f_{\sigma(\gamma)}$ pour tout $\alpha \in \Upsilon$, $\gamma \in \Gamma$ et $\sigma \in G$. L'action de $G$ sur $A'[X_\alpha]$ et $A[X_\alpha]$ est l'action induite par $\sigma(X_\alpha) = X_{\sigma(\alpha)}$ et la surjection naturelle $A'[X_\alpha] \to A[X_\alpha]$ est $G$-équivariante. Notons $f'_\gamma$, la relation $f_\gamma \in A[X_\alpha]$ vue comme élément de $A'[X_\alpha]$. Écrivons $J = \sum_{\lambda \in \Lambda} A' t_\lambda$ et $B = A'[X_\alpha]/I'$. Ainsi $((f'_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}, (t_\lambda)_{\lambda \in \Lambda})$ est un système de générateurs $G$-stables de $I'$ comme $(A', G)$-module :

$$B = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma, t_\lambda).$$

Soit $(V_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ (resp. $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$) un système de variables $G$-stables (pour l'action de $G$ relevée à $I'$) indépendantes et soit

$$R = A[X_\alpha], \quad F = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R V_\gamma, \quad R' = A'[X_\alpha], \quad F' = (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} R' V_\gamma) \oplus (\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R' T_\lambda).$$

La construction §3.1 (1) donne alors une $G$-présentation libre de $B/A$ (resp. de $B/A'$) :

$$0 \to Q/F_0 \to F/F_0 \to R \to B \to 0,$$
$$0 \to Q'/F_0' \to F'/F_0' \to R' \to B \to 0.$$

**L'obstruction aux $G$-déformations** de $B/A$ à $A'$ est la classe

$$\mathrm{obs}_{B/A}(A') = [\theta] \in \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, J \otimes_A B)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(F \otimes_R B, J \otimes_A B)} \simeq \mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$$

où $\theta : Q/F_0 \to J \otimes_A B$ est définie comme suit : un élément de $Q$ est une relation entre les $f_\gamma$ dans $A[X_\alpha]$ :

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma f_\gamma = 0, \quad a_\gamma \in A.$$

Relevons cette équation à $Q'$ modulo $F_0$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda t_\lambda + \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma f'_\gamma = 0 \quad \text{dans } A'[X_\alpha].$$

L'application $\theta$ est définie par

$$\theta : Q/F_0 \to J \otimes_A B, \quad \theta(\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma f_\gamma) = \sum_{\lambda \in \Lambda} g_\lambda (t_\lambda \otimes 1).$$

Le théorème suivant montre que l'élément $\mathrm{obs}_{B/A}(A')$ s'identifie effectivement à une obstruction au sens suivant :

THÉORÈME 3.5 : *Soit $A' \to A$ une petite surjection de noyau $J$. Soit $B$ une $A$-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à $A$. Soit $G$ un groupe fini de $A$-automorphismes de $B$.*

i. *Alors $B/A$ admet une $G$-déformation à $A'$ si et seulement si*

$$\mathrm{obs}_{B/A}(A') \in \mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$$

*est nulle.*

ii. *Si $\mathrm{obs}_{B/A}(A') = 0$, l'ensemble des $G$-déformations de $B/A$ à $A'$ est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$.*

*Preuve :* i. Supposons que $\mathrm{obs}_{B/A}(A') = 0$. Cela signifie que

$$\theta \in \mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, J \otimes_A B)$$

est induite par une application $(B,G)$-linéaire $\theta_0 \in \mathrm{Hom}_{B,G}(F \otimes_R B, J \otimes_A B)$ :

$$\theta_0 : \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} BV_\gamma \to J \otimes_A B, \quad V_\gamma \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \phi_{\gamma,\lambda}.$$

Pour construire une déformation $G$-équivariante de $B/A$ à $A'$, cherchons une perturbation des équations $(f'_\gamma)$ de la forme

$$f'_\gamma + \psi_\gamma, \quad \psi_\gamma \in JA'[X_\alpha]$$

de telle façon que

$$B' = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \psi_\gamma)$$

soit une $G$-déformation de $B/A$ : $B'$ doit être muni d'une action de $G$ et $B'$ doit être plat sur $A$. Choisissons un relèvement de $\psi_\gamma$ $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda\phi_{\gamma,\lambda} \in JA'[X_\alpha]$. Montrons que $B'$ est alors plat sur $A$. D'après le critère de platitude 3.4, il suffit de montrer que $J \otimes_{A'} B' \to B'$ est injective (car $J \otimes_A B = J \otimes_{A'} B'$). Soit $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \bar{b}_\lambda \in J \otimes_{A'} B'$, avec $\bar{b}_\lambda \in A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \psi_\gamma)$ et $b_\lambda$ un relevé de $\bar{b}_\lambda$ dans $A'[X_\alpha]$. Dire que l'image de $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes \bar{b}_\lambda$ est nulle par $J \otimes_{A'} B' \to B'$, signifie qu'il existe $(c_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \in A'[X_\alpha]^\Gamma$ tels que dans $A'[X_\alpha]$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda b_\lambda = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma(f'_\gamma + \psi_\gamma).$$

Donc $\sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda b_\lambda - \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma(f'_\gamma + \psi_\gamma) \in Q'$. D'où en notant encore $b_\lambda$ (resp. $c_\gamma$) l'image de $b_\lambda$ (resp. $c_\gamma$) dans $A[X_\alpha]$, par définition de $\theta$

$$\theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma f_\gamma) = -\sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda(t_\lambda \otimes 1) + \sum_{\gamma\in\Gamma,\lambda\in\Lambda} \phi_{\gamma,\lambda} c_\gamma (t_\lambda \otimes 1).$$

Or $\theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma f_\gamma) = \sum_{\gamma\in\Gamma,\lambda\in\Lambda} \phi_{\gamma,\lambda} c_\gamma(t_\lambda \otimes 1)$ car $\theta$ est induite par $\theta_0$. Donc $\sum b_\lambda(t_\lambda \otimes 1) = 0$ et $J \otimes A' \to B'$ est injective. En utilisant la $(B,G)$-linéarité de $\theta_0$, nous vérifions que l'action de $G$ est bien définie sur $B'$.

Réciproquement si $B' = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \psi_\gamma)$ est une $G$-déformation de $B/A$ à $A'$. Écrivons $\psi_\gamma = \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \phi_{\gamma,\lambda}$. Alors tout élément $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma f_\gamma$ de $Q$ se relève à $Q'$ modulo $F_0$ sous la forme $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma(f'_\gamma + \psi_\gamma)$. Donc l'application $\theta$ est définie par

$$\theta : Q/F_0 \to J \otimes_A B, \quad \theta(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma f_\gamma) = \sum_{\lambda\in\Lambda,\gamma\in\Gamma} a_\gamma \phi_{\gamma,\lambda}(t_\lambda \otimes 1).$$

Cette application est induite par l'application $\theta_0 : \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} BV_\gamma \to J \otimes_A B, V_\gamma \mapsto \sum_{\lambda\in\Lambda} t_\lambda \otimes a_\gamma \phi_{\gamma,\lambda}$ qui est $(B,G)$-linéaire car $B'$ est une $G$-déformation de $B/A$ à $A'$. D'où $\mathrm{obs}_{B/A}(A') = 0$.

ii. Soit $B'$ une $G$-déformation de $B/A$ à $A'$, $B' = A'[X_\alpha]/(f'_\gamma)$. Toute déformation de $B/A$ à $A'$ peut s'écrire

$$A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \phi_\gamma), \quad \phi_\gamma \in JA'[X_\alpha],$$

où $(\phi_\gamma)$ est une famille $G$-stable. La condition de platitude implique que l'application $\bar{\phi} : I/I^2 \to J \otimes_A B$ induite par $f_\gamma \mapsto \bar{\phi}_\gamma$ est $(B, G)$-linéaire. Réciproquement soit

$$[\bar{\phi}] \in \frac{\mathrm{Hom}_{B,G}(Q/F_0, M)}{\mathrm{Hom}_{B,G}(F \otimes_R B, M)} \simeq \mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B,G}, J \otimes_A B)$$

admettant $\phi : I/I^2 \to J \otimes_A B$, $f_\gamma \mapsto \bar{\phi}_\gamma$ comme représentant. Soit $\phi_\gamma$ un relèvement de $\bar{\phi}_\gamma$ à $JA'[X_\alpha]$. Alors $A'[X_\alpha]/(f'_\gamma + \phi_\gamma)$ est une $G$-déformation de $B/A$ à $A'$. Donc l'ensemble des $G$-déformations de $B/A$ à $A'$ est un torseur sous $\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, J \otimes_A B)$. ∎

3.3. Dévissage spectral des groupes $\mathrm{Ext}^i_{B,G}(\Omega_{B/A}, M)$. Soit $M$ un $(B, G)$-module. Nous supposons, comme dans §3.2, que $B$ est une $A$-algèbre plate réduite essentiellement de type fini d'intersection complète relativement à $A$. Considérons la suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(G, \mathrm{Ext}^q_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M). \tag{5}$$

Précisons les suites exactes de bas degrés associées à cette suite spectrale.

Lemme 3.6 : *La suite suivante est exacte*

(6)

$$0 \to H^1(G, \Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \to H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^2(G, \Theta)$$

*où* $\Theta = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$.

*Preuve :* La filtration sur l'aboutissement de la suite spectrale (5), conduit à la suite exacte

$$0 \to E_\infty^{1,0} \to \mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) \to E_\infty^{0,1} \to 0. \tag{7}$$

Il est immédiat que $E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0} = H^1(G, \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M))$ et que

$$E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = \ker(H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^2(G, \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M))).$$

En identifiant les termes de la suite (7), nous obtenons le résultat annoncé. ∎

*Remarque 3.7 :* Le dévissage spectral de l'espace tangent $\mathrm{Ext}^1_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M)$ fait intervenir deux termes. Les déformations de la singularité de la courbe $C$ au point $x$ d'anneau local $B$ s'expriment via le groupe $H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M))$. L'étude des déformations du point double met en valeur la signification de ce groupe en termes d'épaisseur (voir §5.2).

LEMME 3.8 : *La suite suivante est exacte*

$$H^0(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^2(G, \Theta) \to \mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M)$$
$$\to H^1(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^3(G, \Theta)$$

*où* $\Theta = \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M)$.

*Preuve :* D'après la suite spectrale (5), nous avons la filtration décroissante

$$\mathrm{Ext}^2_{B,G}(\Omega^1_{B/A}, M) = F^0 \supset F^1 \supset F^2 \supset 0.$$

Avec les hypothèses sur l'algèbre $B$, nous avons $F^0/F^1 = 0$ car $\mathrm{Ext}^2_B(\Omega^1_{B/A}, M) = 0$. Il est facile de montrer que $F^1/F^2 = E^{1,1}_\infty = E^{1,1}_3$ et

$$E^{1,1}_3 = \ker(H^1(G, \mathrm{Ext}^1_B(\Omega^1_{B/A}, M)) \to H^3(G, \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M))).$$

Enfin $F^2 = E^{2,0}_\infty$ est le conoyau de $E^{0,1}_2 \to E^{2,0}_2$, ce qui, compte tenu de l'identification de ces termes, conduit à la suite exacte annoncée. ∎

3.4. DÉFORMATIONS ÉQUIVARIANTES LOCALES. Revenons au foncteur des déformations $G$-équivariantes locales d'un point formel point $x \in C$. Comme $C$ est une $k$-courbe génériquement lisse localement d'intersection complète, $\mathcal{O}_x = \widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ est une $k$-algèbre d'intersection complète (plate) génériquement formellement lisse et formellement de type fini. Le formalisme précédent (§3.2) s'applique sans changement à cette situation. Notons $G_x$ le stabilisateur de $x$. Le **foncteur des déformations $G_x$-équivariantes au point** $x$ est

$$D_x : \mathcal{C} \to \mathrm{Ens}, \quad A \mapsto \{G_x\text{-déformations de la } k\text{-algèbre } \mathcal{O}_x\}.$$

Le théorème 3.5 s'adapte immédiatement au cas où $\mathcal{O}_x$ est formellement de type fini sur $k$ en prenant le module des différentielles complété $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_x/k}x$ (comparer avec le cas lisse traité dans [BeMe]) Les obstructions aux déformations appartiennent au groupe $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_x,G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_x/k}, \mathcal{O}_x)$. L'existence de la déformation triviale de $\mathcal{O}_x/k$ à $k[\varepsilon]$ montre que $\mathrm{obs}_{\mathcal{O}_x/k}(k[\varepsilon]) = 0$. Nous avons donc l'isomorphisme

$$D_x(k[\varepsilon]) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_x,G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_x/k}, \mathcal{O}_x).$$

Les hypothèses du critère de Schlessinger ([Sc] §3.7) étant satisfaites, le foncteur des déformations $G_x$-équivariantes au point $x$ admet donc un anneau versel $R_x$ de déformations. L'objet du paragraphe suivant est de relier l'anneau versel $R_{\text{glo}}$ des déformations $G$-équivariantes globales de $C$ aux anneaux versels des déformations aux points singuliers et aux points de ramification sauvage de $C$. Nous prouvons alors que, sous une condition naturelle, ces deux foncteurs sont isomorphes (Théorème 4.3).

## 4. Principe local-global

4.1. Énoncé du principe local-global. La situation est la suivante. Soit $y_1, \dots, y_r$ les images des points singuliers et des points de ramification sauvage du revêtement $C \to C/G$. Cela suppose donc que les points génériques des composantes irréductibles ont une isotropie triviale. Pour $1 \leq i \leq r$, notons $x_i$ un point de $C$ au-dessus de $y_i$ et $G_{x_i}$ son stabilisateur (éventuellement trivial pour un point singulier). Définissons le **foncteur des déformations $G$-équivariantes locales**

$$D_{\text{loc}} = \prod_{1 \leq i \leq r} D_{x_i},$$

où $D_{x_i}$ est le foncteur des déformations $G_{x_i}$-équivariantes au point $x_i$ (voir §3.4). Le choix du point $x_i$ est sans importance, car si nous changeons $x_i$ en autre point $x'_i$ de son orbite sous $G$, nous obtenons un foncteur $D_{G_{x'_i}}$ isomorphe à $D_{G_{x_i}}$. Par localisation en ces points, nous définissons un morphisme

$$\phi : D_{\text{glo}} \to D_{\text{loc}},$$

qui à une déformation $G$-équivariante globale de $C$ à $A$ objet de $\mathcal{C}$ associe les déformations $G_{x_i}$-équivariantes aux points $x_i, 1 \leq i \leq r$ à $A$. D'après le §3.4 l'espace tangent (resp. le groupe d'obstruction) au foncteur $D_{\text{loc}}$ est

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \operatorname{Ext}^j_{\mathcal{O}_{x_i}, G_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{x_i}/k}, \mathcal{O}_{x_i}),$$

pour $j = 1$ (resp. $j = 2$). Notons $\pi : C \to C/G$ et pour $F$ un $(G, \mathcal{O}_C)$-module, $\pi_*^G(F)$ le faisceau sur $C/G$ défini par $\pi_*^G(F)(V) = \Gamma(\pi^{-1}(V), F)^G$, pour $V$ ouvert de $C/G$. Le foncteur exact à gauche

$$\dot{Hom}_{\mathcal{O}_C, G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C}, -) = \pi_*^G(Hom_{\mathcal{O}_C, G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C, G}, -))$$

définit par dérivation les faisceaux sur $C/G$

$$Ext^n_{\mathcal{O}_C, G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C, G}, \mathcal{O}_C), \quad n \in \mathbf{N}.$$

D'après [Gr1] 5.6.9, la fibre en un point $y = \pi(x) \in C/G$ de $Ext^n_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C}, \mathcal{O}_C)$ est

$$Ext^n_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{C/k}, \mathcal{O}_C)_{y=\pi(x)} \simeq Ext^n_{\mathcal{O}_x,G_x}(\widehat{(\Omega^1_{C/k})_x}, \mathcal{O}_x). \tag{1}$$

Grothendieck établit également l'existence d'une suite spectrale ([Gr1] Théorème 5.6.3)

$$E_2^{p,q} = H^p(C/G, Ext^q_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) \Longrightarrow \mathbf{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C). \tag{2}$$

LEMME 4.1 : *L'application*

$$\mathbf{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C) \to \prod_{1\le i\le r} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{x_i}/k}, \mathcal{O}_{x_i})$$

*est surjective de noyau* $H^1(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C))$.

*Preuve :* Considérons la suite spectrale (2) en degré total $p + q = 1$. En constatant que $E_2^{2,0} = H^2(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) = 0$, $E_2^{0,1} = E_\infty^{0,1}$ et $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0}$, nous obtenons la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) &\to \mathbf{Ext}^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C) \\ &\to H^0(C/G, Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) \to 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Le faisceau $Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)$ est à support dans $\{y_1, \ldots, y_r\}$. D'après (1), nous avons donc

$$H^0(C/G, Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C)) \simeq \prod_{1\le i\le r} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{x_i}/k}, \mathcal{O}_{x_i}).$$

Le lemme découle alors de l'identification de ce terme dans la suite exacte (3). ∎

Le noyau $\ker\phi$ du morphisme de foncteurs $\phi : D_{\mathrm{glo}} \to D_{\mathrm{loc}}$ s'interprète en égale caractéristique comme le foncteur des déformations localement triviales : soit $A$ un $k$-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Une déformation $G$-équivariante globale de $C$ à $A$ est **localement triviale** si pour tout point $x_i$, $1 \le i \le r$ la déformation $G_{x_i}$-équivariante induite est la déformation triviale. Le groupe $H^1(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C))$ s'interprète alors comme l'espace tangent au foncteur $\ker\phi$.

LEMME 4.2 : *Les groupes d'obstructions aux foncteurs $D_{\mathrm{glo}}$ et $D_{\mathrm{loc}}$ sont isomorphes.*

*Preuve :* Considérons le terme de degré total $p+q=2$ de la suite spectrale (2). Le terme $E_2^{2,0}$ est nul (voir preuve du lemme 4.1). Comme $Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)$ est à support fini, $E_2^{1,1}=H^1(C/G, Ext^1_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))=0$; nous obtenons l'isomorphisme

$$\mathbf{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)\xrightarrow{\sim} H^0(C/G, Ext^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)).$$

Le faisceau $Ext^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)$ est à support dans $\{y_1,\ldots,y_r\}$. Donc, d'après (1),

$$H^0(C/G, Ext^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C))\simeq\prod_{1\le i\le r}\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{x_i}/k},\mathcal{O}_{x_i})$$

et l'isomorphisme annoncé

$$\mathbf{Ext}^2_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k},\mathcal{O}_C)\xrightarrow{\sim}\prod_{1\le i\le r}\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{x_i},G_{x_i}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}_{x_i}/k},\mathcal{O}_{x_i}). \qquad\blacksquare$$

Avec les lemmes 4.2 et 4.1, la preuve du principe local-global suivant est formellement identique à celle du théorème 3.3.4 [BeMe].

THÉORÈME 4.3 : *Le morphisme $\phi: D_{\mathrm{glo}}\to D_{\mathrm{loc}}$ est lisse.*

*Preuve :* Considérons une petite extension $A'\to A$, il s'agit de prouver que l'application naturelle

$$D_{\mathrm{glo}}(A')\longrightarrow D_{\mathrm{glo}}(A)\times_{D_{\mathrm{loc}}(A)}D_{\mathrm{loc}}(A') \tag{4}$$

est surjective. Soit $[(X,G)]\in D_{\mathrm{glo}}(A)$ tel que $\phi(X)$ se relève à $A'$ en $\widetilde{\phi(X)}$. Ainsi l'obstruction à relever $\phi(X)$ à $A'$ est nulle. D'après le lemme 4.2, l'obstruction à relever $(X,G)$ à $A'$ est donc aussi nulle : nous avons une déformation $(\tilde{X},G)$ à $A'$. Les éléments $\phi(\tilde{X})$ et $\widetilde{\phi(X)}$ diffèrent de l'action d'un élément $\delta$ de l'espace tangent au foncteur $D_{\mathrm{loc}}$. Or, d'après le lemme 4.1, $\phi$ est surjective sur les espaces tangents. Donc $\delta$ admet un antécédent par $\phi$ dans l'espace tangent au foncteur $D_{\mathrm{glo}}$. En corrigeant $\tilde{X}$ par cet antécédent, nous obtenons $\phi(\tilde{X})=\widetilde{\phi(X)}$, d'où la surjectivité de (4) et la lissité du morphisme de foncteur $\phi$. $\blacksquare$

En termes d'anneaux versels de déformations, le théorème 4.3 s'exprime de la façon suivante :

COROLLAIRE 4.4 : *Soit $R_i$ l'anneau versel de déformations de $D_{x_i}$ et $R_{\text{glo}}$ l'anneau versel de déformations de $D_{\text{glo}}$. Alors*

$$R_{\text{glo}} = (R_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} R_r)[[U_1, \ldots, U_N]],$$

avec $N = \dim_k H^1(C/G, Hom_{\mathcal{O}_C,G}(\Omega^1_{\mathcal{O}_C/k}, \mathcal{O}_C))$.

*Remarque 4.5 :* Pour établir le théorème 4.3, nous avons supposé que les points génériques des composantes irréductibles ont une isotropie triviale. Cette hypothèse est toujours satisfaite pour les courbes lisses. En général, les obstructions localisées aux points doubles ne se réduisent pas à celles liées aux origines des branches aux points considérés. De nouvelles obstructions, de nature globale, peuvent apparaître. Elles sont déjà visibles dans [He] et seront étudiées dans un travail en préparation du premier auteur avec Maugeais ([BeMa]).

4.2. RELÊVEMENTS ET ÉPAISSISSEMENTS DES REVÊTEMENTS GALOISIENS. Comme application immédiate du principe local-global (Corollaire 4.4) nous obtenons le résultat suivant concernant le relèvement en caractéristique zéro (voir [He], [Pr]). Les notations et restrictions sont les mêmes que dans le paragraphe précédent (§4.1). En particulier les points génériques des composantes irréductibles ont une inertie triviale.

THÉORÈME 4.6 : *Soit $R$ un anneau de valuation discrète complet qui domine $W(k)$. Le revêtement galoisien $C \to C/G$ admet un relèvement à $R$ si et seulement si pour tout point $x \in C$ avec groupe d'inertie $G_x$ non trivial, l'action de $G_x$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ se relève à $R$.*

*Preuve :* Supposons que la courbe $C$ admette un relèvement équivariant $C'$ à $R$. Alors l'action de $G_x$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ se relève en une action de $G_x$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C',x}$.

Réciproquement $C$ étant une courbe projective, la déformation équivariante de $C$ est algébrisable ([Gro3]). Pour obtenir un relèvement équivariant de $C$ à $R$, il suffit donc d'avoir un morphisme d'anneaux locaux $R_{\text{glo}} \to R$. D'après la structure de $R_{\text{glo}}$ (Corollaire 4.4), il suffit d'avoir des morphismes $R_i \to R$, $1 \leq i \leq r$. Ces morphismes existent car, par hypothèse, en tout point $x$ de $C$, l'action de $G_x$ sur $\widehat{\mathcal{O}}_{C,x}$ se relève. ∎

L'approche par déformations permet de considérer des bases plus générales que dans le théorème 4.6. Dans une même direction, nous pouvons espérer retrouver les théorèmes d'épaississement d'Harbater et Stevenson ([HaSt]) qui sont en fait des résultats de déformations équivariantes en égale caractéristique, mais pas exactement dans le sens qui est fixé dans ce travail. Cela suggère de modifier le foncteur des déformations en "fixant" la base du revêtement. Pour obtenir ces théorèmes, et en suivant leurs hypothèses, il faut se limiter aux épaississements à $k[[T]]$, comme expliqué dans [HaSt]. Cette restriction autorise l'utilisation des résultats de rigidité d'Artin et Hironaka-Rossi (voir [Ar2]).

## 5. Déformations $G$-équivariantes des courbes semi-stables

Nous supposons dorénavant que $C$ est une $k$-courbe semi-stable. Rappelons qu'une **courbe semi-stable** est une courbe projective réduite connexe dont les points singuliers éventuels sont des points doubles ordinaires. L'objet de ce paragraphe est la description des déformations à l'ordre un, en d'autres termes les espaces tangents aux foncteurs des déformations $G$-équivariantes locales et globales de $C$.

5.1. DÉFORMATIONS $G$-ÉQUIVARIANTES DU POINT DOUBLE. Soit $x \in C$ un point double. Alors

$$\mathcal{O} = \widehat{\mathcal{O}}_{C,x} \simeq \frac{k[[x,y]]}{(xy)}.$$

Le groupe d'inertie $G_x$ au point $x$ est un groupe fini d'automorphisme $G_x \subset \operatorname{Aut}\mathcal{O}$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous notons $G$ pour $G_x$. Nous allons interpréter en termes de déformations la suite exacte (6) décrivant l'espace tangent aux déformations $G_x$-équivariantes du point double

$$D_{\mathcal{O},G}(k[\varepsilon]) \simeq \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}).$$

Commençons par une remarque sur les automorphismes de $\frac{A[[x,y]]}{(xy-a)}$ pour $A$ un objet de $\mathcal{C}$ et $a \in \mathcal{M}_A$.

LEMME 5.1 : *Soit $\Delta(x,y) = xy - a$. Pour tout $F \in A[[x,y]]$ il existe une unique écriture sous la forme*

$$F(x,y) = H(x,y)\Delta(x,y) + \phi(x) + \psi(y),$$

*avec $H \in A[[x,y]]$, $\phi \in A[[x]]$ $\phi(0) = 0$ et $\psi \in A[[y]]$.*

*Preuve :* L'existence d'une telle écriture est claire. Pour établir l'unicité soit $H(x,y) = \sum_{p,q\in\mathbf{N}} h_{p,q}x^py^q \in A[[x,y]]$ tel que $H(x,y)\Delta(x,y) = \phi(x) + \psi(y)$. Alors

$$\sum_{p,q\in\mathbf{N}} h_{p,q}x^{p+1}y^{q+1} - \sum_{p,q\in\mathbf{N}} ah_{p,q}x^py^q = \phi(x) + \psi(y).$$

Donc pour tout $p, q \in \mathbf{N}$, $h_{p,q} = ah_{p+1,q+1}$. Par récurrence, pour tout $l > 0$, $h_{p,q} = a^l h_{p+l,q+l}$. Comme l'anneau $A$ est séparé pour la topologie $\mathcal{M}_A$-adique, $h_{p,q} = 0$, $p, q \in \mathbf{N}$, $H = 0$. ∎

Soit $\sigma \in G$ un automorphisme de $\mathcal{O}$ qui préserve les branches. Il est défini par linéarité par

$$\sigma(x) = xU(x), \quad \sigma(y) = yV(y), \quad \text{avec } U(x) = \sum_{i\geq 0} U_i x^i, \quad V(y) = \sum_{i\geq 0} V_i y^i.$$

Pour étudier $D_{\mathcal{O},G}(k[\varepsilon])$, décrivons les relèvements de $\sigma$ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$ avec $t \in k$ fixé. Un tel relèvement $\tilde{\sigma}$ s'écrit

$$\tilde{\sigma}(x) = x\tilde{U}(x) + t\varepsilon S(y), \quad \tilde{\sigma}(y) = y\tilde{V}(y) + t\varepsilon T(x),$$

avec $S(y) \in k[[y]]$, $T(x) \in k[[x]]$, $\tilde{U}(x) \in k[\varepsilon][[x]]$, $\tilde{V}(y) \in k[\varepsilon][[y]]$ tels que modulo $(\varepsilon)$, $\tilde{U}(x) \equiv U(x)$ et $\tilde{V}(y) \equiv V(y)$. De plus l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ doit satisfaire $\tilde{\sigma}(xy - t\varepsilon) \subset (xy - t\varepsilon)$. Or

$$\tilde{\sigma}(xy - t\varepsilon) = (x\tilde{U}(x) + t\varepsilon S(y))(y\tilde{V}(y) + t\varepsilon T(x)) - t\varepsilon.$$

Modulo $(xy - t\varepsilon)$ nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(xy - t\varepsilon) \equiv & t\varepsilon(U_0V_0 - 1) + xt\varepsilon\Big(U(x)T(x) + V_0\sum_{i\geq 0} U_{i+1}x^i\Big) \\ & + yt\varepsilon\Big(V(y)S(y) + U_0\sum_{i\geq 0} V_{i+1}y^i\Big).\end{aligned} \tag{1}$$

Nous en déduisons alors

Lemme 5.2 : *L'automorphisme $\sigma$ se relève en un automorphisme $\tilde{\sigma}$ de $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$ si et seulement si $t = 0$ ou si $U_0V_0 = 1$.*

*Preuve :* Supposons $t \neq 0$, d'après (1) la condition $U_0V_0 = 1$ est nécessaire. Elle est suffisante car l'automorphisme $\tilde{\sigma}$ défini par

$$S(y) = \frac{-U_0\sum_{i\geq 0} V_{i+1}y^i}{V(y)}, \quad T(x) = \frac{-V_0\sum_{i\geq 0} U_{i+1}x^i}{U(x)}$$

et $\tilde{U}(x) = U(x), \tilde{V}(y) = V(y)$, est un relèvement de $\sigma$ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$ ($U(x)$ et $V(y)$ sont inversibles car $U_0V_0 = 1$). ∎

*Remarque 5.3 :* Supposons les hypothèses du lemme 5.2 satisfaites. Alors il existe $\tilde{\sigma}$ un relèvement de $\sigma$ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$. Un autre relèvement $\tilde{\sigma}'$ de $\sigma$ s'obtient à partir de $\tilde{\sigma}$ par

$$\tilde{\sigma}'(x) = \tilde{\sigma}(x) + t\varepsilon x U'(x), \quad \tilde{\sigma}'(y) = \tilde{\sigma}(y) + t\varepsilon y V'(y),$$

pour $U'(x) \in k[[x]]$, $V'(y) \in k[[y]]$.

*Remarque 5.4 :* Si le groupe d'inertie est un $p$-groupe, la condition $U_0 V_0 = 1$ est toujours satisfaite. Dans le cas modéré cette condition correspond à l'hypothèse sous laquelle il est possible de lissifier l'action (modérée) de $G$ ([Ek], [Sa]). Nous verrons (§5.2) que cette hypothèse revient à supposer que l'action de $G$ est triviale sur l'espace tangent aux deformations infinitésimales du point double.

5.2. Déformations infinitésimales d'un point double. Un relèvement de $\mathcal{O}$ à $A$ est la donnée d'une $A$-algèbre plate $R$ avec un morphisme $R \xrightarrow{\alpha} R \otimes_A k \simeq \mathcal{O}$. Une déformation de $\mathcal{O}$ à $A$ est une classe d'équivalence de tels relèvements : $R$ et $R'$ sont équivalents s'il existe un $A$-isomorphisme $\phi : R \xrightarrow{\sim} R'$ avec $\alpha' \circ \phi = \alpha$.

Par définition le **foncteur des déformations infinitésimales du point double** est

$$F : \mathcal{C} \to \text{Ens}, \quad A \mapsto \{\text{déformations de } \mathcal{O} \text{ à } A\}.$$

D'après [DeMu], ce foncteur des déformations infinitésimales du point double a une déformation effective à l'anneau versel $\frac{W(k)[[x,y,t]]}{(xy-t)}$ : toute déformation à $A$ objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à la classe d'équivalence de $(\frac{A[[x,y]]}{(xy-a)}, \alpha)$, pour un $a \in \mathcal{M}_A$, l'application $\alpha$ étant induite par l'application canonique $A \to A/\mathcal{M}_A \simeq k$. L'espace tangent au foncteur $F$ est ([Ar1])

$$F(k[\varepsilon]) \simeq \text{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) \simeq k.$$

Étudions l'action de $G$ sur $\text{Ext}^1_{\mathcal{O}/k}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. Une déformation de $k[[x,y]]/(xy)$ à $k[\varepsilon]$ est une classe d'équivalence de relèvement de la forme

$$\mathcal{O}_h = k[\varepsilon][[x,y]]/(xy - \varepsilon h(x,y)), \quad h(x,y) \in k[[x,y]].$$

Deux relèvements $\mathcal{O}_h$ et $\mathcal{O}_{h'}$ sont équivalents si $h(0,0) = h'(0,0)$. Il suffit donc de considérer les relèvements de la forme

$$\mathcal{O}_t = k[\varepsilon][[x,y]]/(xy - t\varepsilon), \quad t \in k.$$

Le groupe $G$ agit sur l'espace tangent des déformations infinitésimales du point double $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. L'action sur $[\mathcal{O}_t, \alpha_t : \mathcal{O}_t \to \mathcal{O}]$ est définie par

$$\sigma[\mathcal{O}_t, \alpha_t] = [\mathcal{O}_t, \sigma\alpha_t], \quad \sigma \in G.$$

Supposons que l'action de $G$ préserve les branches. Un élément $\sigma \in G$ vu comme automorphisme de $\mathcal{O}$ s'écrit

$$\sigma(x) = xU(x), \sigma(y) = yV(y) \quad \text{avec } U(x) = \sum_{i \geq 0} U_i x^i, V(y) = \sum_{i \geq 0} V_i y^i.$$

Comme $\sigma(xy - t\varepsilon) = U_0 V_0 (xy - U_0^{-1} V_0^{-1} t\varepsilon) +$ termes de plus haut degré, $\sigma$ agit sur l'espace tangent par la multiplication par $(U_0V_0)^{-1}$. L'hypothèse du lemme 5.2 consiste donc à supposer que l'action de $G$ sur $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$ est triviale.

Dorénavant, nous supposons que l'action de $G$ préserve les branches et est triviale sur l'espace tangent.

5.3. Interprétation du dévissage spectral. Nous donnons une interprétation en termes de déformations de la suite exacte décrivant l'espace tangent $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\Omega_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$ (Lemme 3.6)

$$0 \to H^1(G, \Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) \to H^0(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})) \to H^2(G, \Theta)$$

où $\Theta = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. D'après §5.2, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$ est l'espace tangent au foncteur des déformations infinitésimales du point double. Comme l'action de $G$ est supposée triviale $H^0(G, \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$.

Pour interpréter le terme $H^1(G, \Theta)$, introduisons $G_x, G_y$ les restrictions de $G$ sur les branches respectives de paramètres $x$ et $y$. Alors

Lemme 5.5 : *Comme $G$-module,*

$$\Theta \simeq xk[[x]]\frac{\partial}{\partial x} \oplus yk[[y]]\frac{\partial}{\partial y},$$

*où $k[[x]]\partial/\partial x$ (resp. $k[[y]]\partial/\partial y$) est le $k[[x]]$-module (resp. le $k[[y]]$-module) des champs de vecteurs formels sous $G_x$ (resp. $G_y$).*

*Preuve :* Par définition $\Theta = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O})$. Or

$$\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k} \simeq \frac{k[[x,y]]dx \oplus k[[x,y]]dy}{(xdy + ydx)}.$$

Donc

$$\Theta = \left\{ p\frac{\partial}{\partial x} + q\frac{\partial}{\partial y}, p, q \in \mathcal{O}, yp(x,y) + xq(x,y) = 0 \right\}.$$

Écrivons $p(x,y) = p_1(x) + p_2(y)$, $q(x,y) = q_1(x) + q_2(y)$ avec $p_2(0) = q_1(0) = 0$. Alors

$$yp(x,y) + xq(x,y) = yp_1(x) + yp_2(y) + xq_1(x) + xq_2(y) = 0 \in \frac{k[[x,y]]}{(xy)}.$$

Ainsi $p_2(y)$ et $q_1(x)$ sont constants, donc nuls; et $p_1(0) = q_2(0) = 0$. D'où $p \in xk[[x]]$ et $q \in yk[[y]]$. ∎

*Remarque 5.6 :* Rappelons que dans le cas d'un point régulier, les déformations $G_x$-équivariantes de $k[[x]]$ ont pour espace tangent $H^1(G_x, k[[x]]d/dx)$. Il est donc naturel d'interpréter le terme $H^1(G,\Theta)$ comme la contribution des déformations équivariantes de chacune des branches aux déformations équivariantes du point double.

Pour tout $\sigma \in G$, notons

$$\sigma(x) = f_\sigma(x) = xU_\sigma(x) = x\sum_{i\geq 0} U_{\sigma,i}x^i, \quad \sigma(y) = g_\sigma(y) = yV_\sigma(y) = y\sum_{i\geq 0} V_{\sigma,i}y^i,$$

vu comme élément de $\mathrm{Aut}(k[[x,y]]/(xy))$. Soit

$$\alpha_\sigma = \frac{V_{\sigma,0}}{U_{\sigma,0}}U_{\sigma,1}, \quad \beta_\sigma = \frac{U_{\sigma,0}}{V_{\sigma,0}}V_{\sigma,1}$$

pour $\sigma \in G$. Définissons $[c_1] \in H^2(G,\Theta)$ comme la classe de $c_1 : G^2 \to \Theta$, avec

$$c_1(\sigma,\tau) = \Big(\frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{\alpha_{\sigma\tau}}{g'_{\sigma\tau}(y)} - \sigma\Big(\frac{\alpha_\tau}{g'_\tau(y)}\Big) - \frac{\alpha_\sigma}{g'_\sigma(y)}\Big)\frac{\partial}{\partial y}.$$

PROPOSITION 5.7 : *Le morphisme* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) \to H^2(G,\Theta)$ *est nul si et seulement si la classe* $[c_1]$ *est nulle dans* $H^2(G,\Theta)$.

*Preuve :* Comme $G \to \mathrm{Aut}\,k[[x,y]]/(xy)$ est un homomorphisme de groupe, $f_{\sigma\tau}(x) = f_\tau(f_\sigma(x))$ et $g_{\sigma\tau}(x) = g_\tau(g_\sigma(x))$. Un relèvement $\tilde{\sigma}$ de $\sigma$ à $\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}$, $t \neq 0$, s'écrit (Lemme 5.2)

$$\tilde{\sigma}(x) = f_\sigma(x) + t\varepsilon S_\sigma(y) \quad \text{avec } S_\sigma(y) = \frac{-U_{\sigma,0}\sum_{i\geq 0} V_{\sigma,i+1}y^i}{V_\sigma(y)},$$

$$\tilde{\sigma}(y) = g_\sigma(y) + t\varepsilon T_\sigma(x) \quad \text{avec } T_\sigma(x) = \frac{-V_{\sigma,0}\sum_{i\geq 0} U_{\sigma,i+1}x^i}{U_\sigma(x)},$$

vu comme élément de $\mathrm{Aut}\,k[\varepsilon][[x,y]]$. Pour avoir un relèvement de $G$ à

$$\mathrm{Aut}\,k[\varepsilon][[x,y]]/(xy - t\varepsilon)$$

nous devons vérifier que le 2-cocycle $c_1(\sigma,\tau)$ défini par l'égalité $\tilde{\sigma}\tilde{\tau} \equiv c_1(\sigma,\tau)\widetilde{\sigma\tau}$ $(xy - t\varepsilon)$ est un 2-cobord. Écrivons

$$c_1(\sigma,\tau)(x) = x + t\varepsilon\phi_{\sigma,\tau}(x), \quad c_1(\sigma,\tau)(y) = y + t\varepsilon\psi_{\sigma,\tau}(y).$$

Nous avons

$$\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(x) = \tilde{\sigma}(f_\tau(x) + t\varepsilon S_\tau(y)) = f_\tau(f_\sigma(x) + t\varepsilon S_\sigma(y)) + t\varepsilon S_\tau(g_\sigma(y)),$$
$$\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(x) = f_{\sigma\tau}(x) + t\varepsilon(f'_\tau(f_\sigma(x))S_\sigma(y) + S_\tau(g_\sigma(y))).$$

Or $S_\sigma(y) = -\beta_\sigma + y(\text{polynôme en } y)$ pour $\beta_\sigma = \frac{U_{\sigma,0}}{V_{\sigma,0}}V_{\sigma,1}$ et $f'_\tau(x) = U_\tau(x) + xU'_\tau(x)$. Donc modulo $(xy - t\varepsilon)$,

$$\tilde{\sigma}\tilde{\tau}(x) \equiv f_{\sigma\tau}(x) + t\varepsilon(-\beta_\sigma f'_\tau(f_\sigma(x)) + \beta_\sigma U_{\tau,0} + U_{\tau,0}S_\sigma(y) + S_\tau(g_\sigma(y))).$$

Nous devons identifier ce terme avec la classe modulo $(xy - t\varepsilon)$ de

$$c_1(\sigma,\tau)\widetilde{\sigma\tau}(x) = f_{\sigma\tau}(x) + t\varepsilon(f'_{\sigma\tau}(x)\phi_{\sigma\tau}(x) + S_{\sigma\tau}(y)).$$

Remarquons d'abord que les termes en $y$ coïncident. Comme $g_{\sigma\tau}(y) = g_\tau(g_\sigma(y))$, $V_{\sigma\tau}(y) = V_\sigma(y)V_\tau(g_\sigma(y))$. Donc

$$\begin{aligned} 1 - U_{\sigma\tau,0}V_{\sigma\tau}(y) &= \frac{V_{\sigma\tau}(y)}{V_\sigma(y)}\Big(\frac{1}{V_\tau(g_\sigma(y))} - U_{\sigma\tau,0}V_\sigma(y)\Big) \\ &= \frac{V_{\sigma\tau}(y)}{V_\sigma(y)}\Big(U_{\tau,0}(1 - U_{\sigma,0}V_\sigma(y)) + \frac{1 - U_{\tau,0}V_\tau(g_\sigma(y))}{V_\tau(g_\sigma(y))}\Big). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1 - U_{\sigma\tau,0}V_{\sigma\tau}(y)}{V_{\sigma\tau}(y)} = U_{\tau,0}\frac{1 - U_{\sigma,0}V_\sigma(y)}{V_\sigma(y)} + \frac{1 - U_{\tau,0}V_\tau(g_\sigma(y))}{V_\sigma(y)V_\tau(g_\sigma(y))}.$$

Or

$$yS_\sigma(y) = \frac{1 - U_{\sigma,0}V_\sigma(y)}{V_\sigma(y)} \in k[[y]].$$

D'où

$$S_{\sigma\tau}(y) = U_{\tau,0}S_\sigma(y) + S_\tau(g_\sigma(y))$$

(car $U_{\sigma_0}V_{\sigma,0} = 1$). Les termes en $x$ donnent $\phi_{\sigma,\tau}$ :

$$\phi_{\sigma,\tau}(x) = \beta_\sigma\Big(\frac{U_{\tau,\sigma} - f'_\tau(f_\sigma(x))}{f'_{\sigma\tau}(x)}\Big).$$

Comme $U_{\tau,0}\beta_\sigma + \beta_\tau = \beta_{\sigma\tau}$ et $f'_{\sigma\tau}(x) = f'_\sigma(x)f'_\tau(f_\sigma(x))$ est inversible

$$\phi_{\sigma,\tau}(x) = \frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \frac{\beta_\tau}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}.$$

Or l'action de $G$ sur les champs de vecteur s'écrit

$$\sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) = \frac{\beta_\tau}{f'_{\sigma\tau}(x)}.$$

Donc

$$\phi_{\sigma,\tau}(x) = \frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}.$$

De la même façon, nous pouvons montrer que

$$\psi_{\sigma,\tau}(y) = \frac{\alpha_{\sigma\tau}}{g'_{\sigma\tau}(y)} - \sigma\Big(\frac{\alpha_\tau}{g'_\tau(y)}\Big) - \frac{\alpha_\sigma}{g'_\sigma(y)}.$$

Les relèvements $\tilde{\sigma}$ de $\sigma \in G$ à $k[[x,y]]/(xy)$ définissent une déformation $G$-équivariante

$$\Big[\frac{k[\varepsilon][[x,y]]}{(xy-t\varepsilon)}, G\Big], \quad t \neq 0$$

de $\mathcal{O}$ à $k[\varepsilon]$ si et seulement si la classe $[c_1]$ de $c_1 : G^2 \to \Theta$,

$$c_1(\sigma,\tau) = \Big(\frac{\beta_{\sigma\tau}}{f'_{\sigma\tau}(x)} - \sigma\Big(\frac{\beta_\tau}{f'_\tau(x)}\Big) - \frac{\beta_\sigma}{f'_\sigma(x)}\Big)\frac{\partial}{\partial x} + \Big(\frac{\alpha_{\sigma\tau}}{g'_{\sigma\tau}(y)} - \sigma\Big(\frac{\alpha_\tau}{g'_\tau(y)}\Big) - \frac{\alpha_\sigma}{g'_\sigma(y)}\Big)\frac{\partial}{\partial y}$$

est nulle dans $H^2(G,\Theta)$. ∎

*Remarque 5.8 :* D'après le lemme 3.6,

$$\dim_k \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}_{\mathcal{O}/k}, \mathcal{O}) = \dim_k H^1(G,\Theta) + \delta_1,$$

avec $\delta_1 = 1$ si la classe $[c_1]$ est nulle et $\delta_1 = 0$ sinon. D'après le calcul précédent (Proposition 5.7), ce terme $\delta_1$ s'interprète comme la contribution des déformations du point double aux déformations équivariantes. Il est donc important d'avoir un critère de (non)nullité de cette classe.

Soit $G = \langle\sigma\rangle \subset \operatorname{Aut} \frac{k[[x,y]]}{(xy)}$ un $p$-groupe cyclique $G$ qui préserve les branches et agit trivialement sur l'espace tangent du point double. Notons $G_x = \langle\sigma(x)\rangle$, $G_y = \langle\sigma(y)\rangle$ et $p^{n_x}$, $p^{n_y}$ leurs ordres respectifs. Le groupe $G_x$ (resp. $G_y$) s'identifie au groupe de Galois de l'extension $k((x))/k((t_x))$ (resp. $k((y))/k((t_y))$) avec $k[[t_x]] = k[[x]]^{G_x}$ (resp. $k[[t_y]] = k[[y]]^{G_y}$). Notons $\beta_x$ (resp. $\beta_y$) l'exposant de la différente de $k((x))/k((t_x))$ (resp. de $k((y))/k((t_y))$). Par convention cette différente est égale à -1 si le groupe de Galois est trivial. Avec ces notations, nous pouvons énoncer le corollaire suivant (voir remarque 5.8) :

COROLLAIRE 5.9 : *Soit* $G \subset \mathrm{Aut}\,\frac{k[[x,y]]}{(xy)}$ *un p-groupe cyclique qui préserve les branches et agit trivialement sur l'espace tangent du point double. Alors*

$$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) = \left\lfloor \frac{2(\beta_x+1)}{p^{n_x}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta_x+1}{p^{n_x}} \right\rceil + \left\lfloor \frac{2(\beta_y+1)}{p^{n_y}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta_y+1}{p^{n_y}} \right\rceil + \delta_1,$$

*où* $\delta_1 = 1$ *si la classe* $[c_1]$ *est nulle et* $\delta_1 = 0$ *sinon.*

*Preuve :* Nous avons la suite exacte (Lemme 3.6)

$$0 \to H^1(G,\Theta) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})^G \xrightarrow{\varphi} H^2(G,\Theta).$$

Comme l'action de $G$ est supposée triviale sur l'espace tangent

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})^G \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \simeq k.$$

Ainsi $\dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) = \dim_k H^1(G,\Theta) + \delta_1$ avec $\delta_1 = 1$ si $\varphi = 0$ et $\delta_1 = 0$ sinon (cette condition est traduite en termes de nullité de la classe $[c_1]$ dans la proposition 5.7).

Il nous suffit donc de calculer $\dim_k H^1(G,\Theta)$. D'après le lemme 5.5, $\Theta = xk[[x]]\partial/\partial x \oplus yk[[y]]\partial/\partial y$. En reprenant la preuve de la proposition 4.1.1 [BeMe], nous obtenons

$$\dim_k H^1\Big(G_x, xk[[x]]\frac{d}{dx}\Big) = \left\lfloor \frac{2(\beta_x+1)}{p^{n_x}} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\beta_x+1}{p^{n_x}} \right\rceil.$$

D'où le résultat annoncé. ∎

*Remarque 5.10 :* Si pour tout $\sigma \in G$, les conducteurs de $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ sont différents de 1, alors $\delta_1 = 1$. En effet dans ce cas $\alpha_\sigma = \beta_\sigma = 0$, $\sigma \in G$, donc $c_1 = 0$.

*Remarque 5.11 :* Rappelons que d'après la théorie des déformations, la dimension de l'espace tangent au foncteur de déformation est égale au nombre minimal de générateur de l'anneau versel de déformations. Le corollaire 5.9 donne donc une information précise sur l'anneau versel de déformations équivariantes du point double.

COROLLAIRE 5.12 : *Soit* $G \subset \mathrm{Aut}\,\frac{k[[x,y]]}{(xy)}$ *un p-groupe cyclique qui préserve les branches et agit trivialement sur l'espace tangent du point double. Alors*

$$\dim_k \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) + \delta_2,$$

*avec* $\delta_2 \in \{0,1\}$.

*Preuve :* La suite suivante est exacte (Lemme 3.8)

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to H^2(G,\Theta) \to \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \\ \to H^1(G,\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})) \to H^3(G,\Theta).$$

D'après le lemme 5.5, $\Theta = xk[[x]]\partial/\partial x \oplus yk[[y]]\partial/\partial y$. D'après la proposition 4.1.1 [BeMe] $\dim_k H^1(G_x, xk[[x]]d/dx) = \dim_k H^2(G_x, xk[[x]]d/dx)$. D'où

$$\dim_k H^1(G,\Theta) = \dim_k H^2(G,\Theta).$$

Avec les notations du corollaire 5.9, $\dim_k \operatorname{Im}(\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) \to H^2(G,\Theta)) = \delta_1$. D'où

$$\dim_k \operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) = \\ \dim_k \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O}) + \dim_k \ker\Big(H^1(G,\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})) \to H^3(G,\Theta)\Big). \quad \blacksquare$$

*Remarque 5.13 :* D'après la théorie des déformations, la dimension du groupe des obstructions $\operatorname{Ext}^2_{\mathcal{O},G}(\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{O}/k},\mathcal{O})$ est un majorant du nombre minimal des relations de l'anneau versel des déformations équivariantes du point double. Le corollaire 5.12 suggère donc qu'il y a "beaucoup" d'obstructions à déformer le point double.

Enfin, les corollaires 5.9, 5.12 revèlent l'importance de la notion d'épaisseur de la déformation verselle : La déformation formelle équivariante du point double a pour base $\frac{R_{\text{ver}}[[x,y]]}{(xy-r)}$ où $R_{\text{ver}}$ est l'anneau versel de la déformation et $r \in \mathcal{M}_{R_{\text{ver}}}$. **L'épaisseur de la déformation verselle** est définie par $e = \sup(m, r \in \mathcal{M}^m_{R_{\text{ver}}})$. La nullité de la classe $[c_1]$ ( c'est-à dire, la nullité du terme $\delta$ dans les corollaires 5.9 et 5.12) traduit que l'épaisseur de la déformation verselle $\frac{R_{\text{ver}}[[x,y]]}{(xy-r)}$ est 1 : $r \not\equiv 0 \bmod \mathcal{M}^2_{R_{\text{ver}}}$. Plus généralement, il serait intéressant d'interpréter cohomologiquement l'épaisseur $e$ de la déformation verselle. Enfin il est naturel de demander sous quelle condition sur le groupe d'inertie $G$ du point double, l'action de $G$ peut se relever à une courbe lisse.

## Références

[Ar1] M. Artin, *Lectures on Deformations of Singularities*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1976.

[Ar2] M. Artin, *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **36** (1969), 23–58.

[BeMa] J. Bertin et S. Maugeais, *Déformations équivariantes des courbes semistables*, dans volume dédié à Pierre Van Moerbeke, Annales de l'Institut Fourier **55** (2005), 1905–1941.

[BeMé] J. Bertin et A. Mézard, *Déformations formelles des revêtements sauvagement ramifiés de courbes algébriques*, Inventiones Mathematicae **141** (2000), 195–238.

[DeMu] P. Deligne et D. Mumford, *The irreductibility of the space of curves of given genus*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **36** (1969), 75–109.

[Ek] T. Ekedahl, *Boundary behaviour of Hurwitz schemes*, dans *The Moduli Space of Curves* (R. Dijkgraaf, C. Faber et G. van der Geer, eds.), Birkhäuser, Basel, 1995.

[Ga] M. Garuti, *Prolongement de revêtements galoisiens en géométrie rigide*, Compositio Mathematica **104** (1996), 305–331.

[GrMa] B. Green et M. Matignon, *Liftings of Galois covers of smooth curves*, Compositio Mathematica **113** (1998), 239–274.

[Gr1] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Mathematical Journal **9** (1967), 119–221.

[Gr2] A. Grothendieck, *Séminaire de géométrie algébrique*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1962.

[Gr3] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique*, Extraits du Séminaire Bourbaki 1957–1962, Sécr. Math., Paris, 1962.

[HaSt] D. Harbater et K. Stevenson, *Patching and thickening problems*, Journal of Algebra **212** (1999), 272–304.

[He] Y. Henrio, *Arbres de Hurwitz et automorphismes d'ordre p des disques et des couronnes p-adiques formels*, Thèse de doctorat, Bordeaux, France, 1999.

[Il] L. Illusie, *Complex contangent et déformations II*, Lecture Notes in Mathematics **240**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[LiSc] S. Lichtenbaum et M. Schlessinger, *The cotangent complex of a morphism*, Transactions of the American Mathematical Society **128** (1980), 41–70.

[Pr] R. Pries, *Construction of covers with formal and rigid geometry*, dans *Courbes semi-stables et groupe fondamental en géométrie algébrique*, (J.-B. Bost, F. Loeser et M. Raynaud, eds.), Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 157–167.

[Sa] M. Saïdi, *Revêtements modérés et groupe fondamental de groupes*, Compositio Mathematica **107** (1997), 319–338.

[Sc] M. Schlessinger, *Functors of Artin rings,* Transactions of the American Mathematical Society **130** (1968), 208–222.

[Vi] A. Vistoli, *The deformation theory of local complete intersections,* Prépublication alg-geom/9703008.